

22067309

**MATEMÁTICAS**  
**NIVEL MEDIO**  
**PRUEBA 1**

Miércoles 3 de mayo de 2006 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|

---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

- 1. Considere la serie geométrica infinita  $405 + 270 + 180 + \dots$ .
  - (a) Halle la razón común para esta serie, dando su respuesta como una fracción en su forma más simple.
  - (b) Halle el decimoquinto término de esta serie.
  - (c) Halle el valor **exacto** de la suma de la serie infinita.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

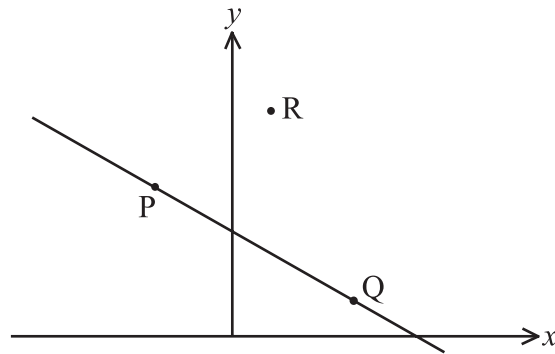
.....

.....

.....



2. En el diagrama siguiente se muestran los puntos  $P(-2, 4)$ ,  $Q(3, 1)$  y  $R(1, 6)$ .



- (a) Halle el vector  $\vec{PQ}$ .
- (b) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por R y es paralela a la recta (PQ).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





4. Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a)  $\ln(x+2) = 3$ .

(b)  $10^{2x} = 500$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. En la siguiente tabla se presenta la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta  $X$ .

|            |     |     |     |      |      |
|------------|-----|-----|-----|------|------|
| $x$        | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    |
| $P(X = x)$ | 0,4 | $p$ | 0,2 | 0,07 | 0,02 |

- (a) Halle el valor de  $p$ .
- (b) Calcule el valor esperado de  $X$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

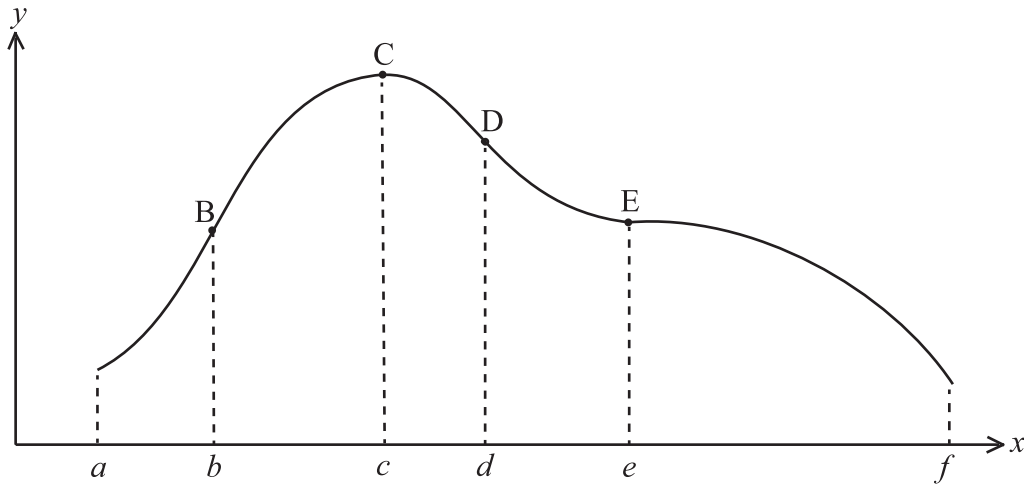
.....

.....

.....



6. El diagrama siguiente presenta la gráfica de una función  $g$ .



La pendiente de la curva tiene un valor máximo en el punto B y un valor mínimo en el punto D. La tangente es horizontal en los puntos C y E.

(a) Complete la siguiente tabla, indicando si la derivada primera  $g'$  es positiva o negativa y si la derivada segunda  $g''$  es positiva o negativa.

| Intervalo   | $g'$ | $g''$ |
|-------------|------|-------|
| $a < x < b$ |      |       |
| $e < x < f$ |      |       |

(b) Complete la tabla que aparece a continuación indicando los puntos de la gráfica descritos por las siguientes condiciones.

| Condiciones             | Punto |
|-------------------------|-------|
| $g'(x) = 0, g''(x) < 0$ |       |
| $g'(x) < 0, g''(x) = 0$ |       |



7. (a) Exprese  $y = 2x^2 - 12x + 23$  en la forma  $y = 2(x - c)^2 + d$ .

La gráfica de  $y = x^2$  se transforma en la gráfica de  $y = 2x^2 - 12x + 23$  mediante las transformaciones

un estiramiento vertical de razón  $k$  **seguido de**  
una traslación horizontal de  $p$  unidades **seguida de**  
una traslación vertical de  $q$  unidades.

(b) Escriba el valor de

(i)  $k$ ;

(ii)  $p$ ;

(iii)  $q$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

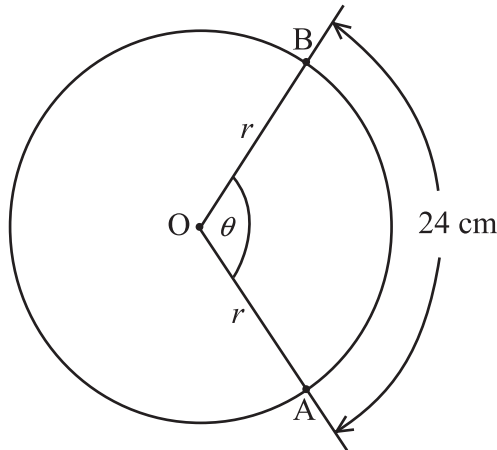
.....

.....





8. El siguiente diagrama muestra un círculo de radio  $r$  y centro  $O$ . El ángulo  $AOB = \theta$ .



La longitud del arco  $AB$  es  $24\text{ cm}$ . El área del sector  $OAB$  es  $180\text{ cm}^2$ .

Halle el valor de  $r$  y de  $\theta$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

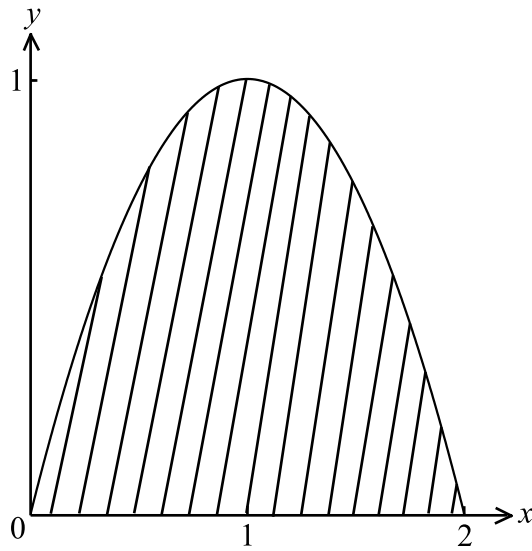
.....

.....

.....



9. El diagrama siguiente presenta una parte de la gráfica de  $y = 2x - x^2$ .



La región sombreada se rota  $360^\circ$  alrededor del eje  $x$ .

- (a) Escriba una expresión para este volumen de revolución.
- (b) Calcule este volumen.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



10. La matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  tiene una inversa  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 6 & b \end{pmatrix}$ .

(a) Escriba el valor de

(i)  $a$ ;

(ii)  $b$ .

Considere las siguientes ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ -3x + y - z &= 10 \\ 2x - 2y + z &= -12 \end{aligned}$$

(b) Escriba estas ecuaciones como una ecuación matricial.

(c) Resuelva la ecuación matricial.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



11. Considere la función  $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + k$ .

(a) Escriba  $f'(x)$ .

La ecuación de la tangente a la gráfica de  $f$  en  $x = p$  es  $y = 7x - 9$ . Halle el valor de

(b)  $p$ ;

(c)  $k$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



12. En una clase, 40 alumnos estudian solamente Química, 30 estudian solamente Física, 20 estudian Química y Física y 60 no estudian ninguna de estas dos asignaturas.

- (a) Halle la probabilidad de que un alumno estudie Física si ese alumno estudia Química.
- (b) Halle la probabilidad de que un alumno estudie Física si ese alumno **no** estudia Química.
- (c) Establezca si los sucesos “estudie Química” y “estudie Física” son mutuamente excluyentes, independientes o ninguna de las dos cosas. Justifique su respuesta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

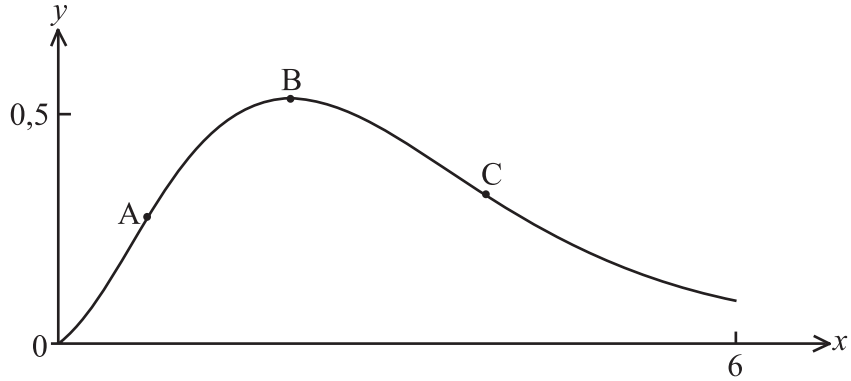
.....

.....

.....



13. El siguiente diagrama presenta la gráfica de  $f(x) = x^2 e^{-x}$  para  $0 \leq x \leq 6$ . Existen puntos de inflexión en A y C y existe un máximo en B.



- (a) Utilizando la regla del producto para la derivación, halle  $f'(x)$ .
- (b) Halle el valor **exacto** de la **coordenada y** de B.
- (c) La derivada segunda de  $f$  es  $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$ . Utilice este resultado para hallar el valor **exacto** de la coordenada  $x$  de C.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



14. El desplazamiento  $s$  metros en un tiempo  $t$  segundos está dado por

$$s = 5 \cos 3t + t^2 + 10, \text{ para } t \geq 0.$$

- (a) Escriba el valor mínimo de  $s$ .
- (b) Halle la aceleración,  $a$ , en el tiempo  $t$ .
- (c) Halle el valor de  $t$  cuando el valor **máximo** de  $a$  ocurre por primera vez.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

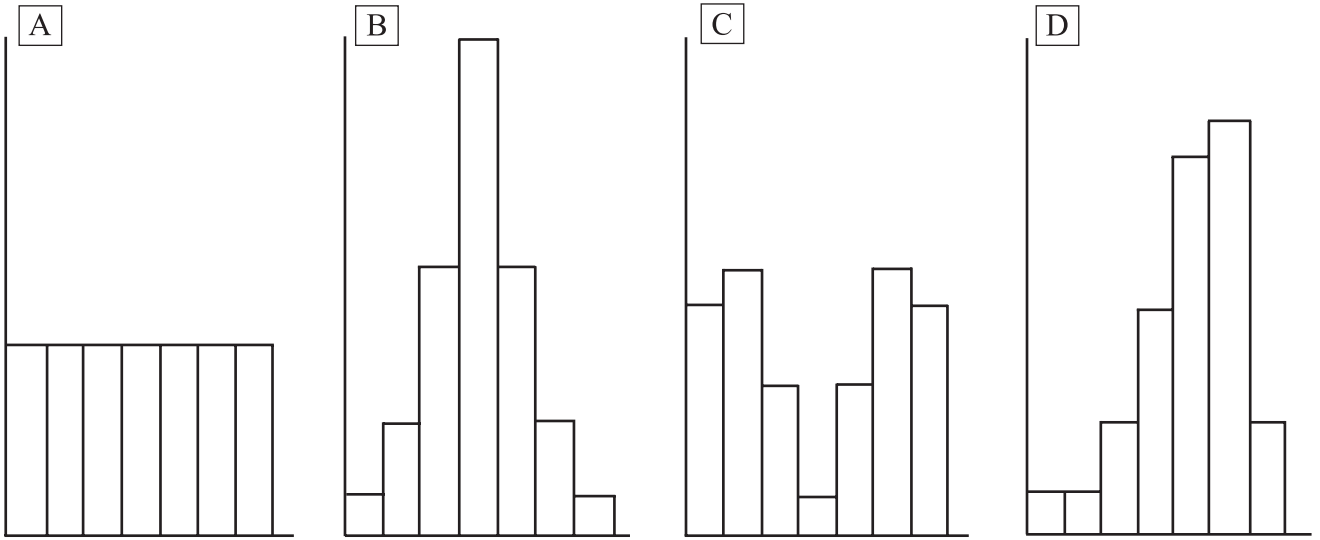
.....

.....

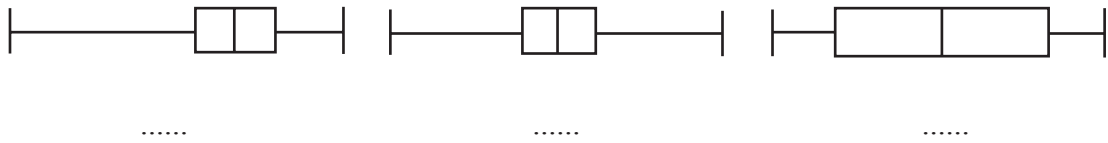
.....



15. Las cuatro poblaciones A, B, C y D tienen el mismo tamaño y el mismo rango. Los siguientes son los histogramas de frecuencias para las cuatro poblaciones.



(a) Cada uno de los tres diagramas de caja y bigotes que aparecen debajo corresponde a una de las cuatro poblaciones. Debajo de cada diagrama, escriba la letra de la población a la que corresponde



(b) Cada una de las tres gráficas de frecuencia acumulada que aparecen debajo corresponde a una de las cuatro poblaciones. Debajo de cada gráfica, escriba la letra de la población a la que corresponde.

